

**AFDELING BEWEGINGSWETENSCHAPPEN, VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
TENTAMEN BIOMECHANICA 2016-2017, DEEL 2, 29 MEI 2017, VERSIE A**

Naam: Studentnummer:

INSTRUCTIE

- Dit is een gesloten boek tentamen
 - Gebruik van een gewone (*geen grafische*) rekenmachine is toegestaan
 - Gebruik van enig ander hulpmiddel is NIET toegestaan
 - Schakel je telefoon volledig uit en berg die op in je jas of tas
 - Beschikbare tijd voor dit tentamen: 90 minuten (anderhalf uur)
 - Beschikbare tijd voor studenten met recht op extra tijd: 105 minuten (een uur en drie kwartier)
 - DEEL A bestaat uit waar/onwaar stellingen
 - DEEL B bestaat uit vraagstukken waarbij alleen het eindantwoord moet worden gegeven
 - DEEL C bestaat uit open vraagstukken waarbij ook de uitwerking moet worden gegeven
 - Verdeel de beschikbare tijd verstandig over de vraagstukken
 - Lees elk vraagstuk goed door voordat je met beantwoording begint
 - Heb je een vraag over een vraagstuk, stel deze vraag dan!
 - Vergeet niet naam en studentnummer in te vullen op elke pagina
 - Leg je collegekaart goed zichtbaar op tafel
- CONTROLEER DAT DIT TENTAMENFORMULIER BESTAAT UIT 5 PAGINA'S
- SLA HET TENTAMEN PAS OPEN WANNEER DAAR TOESTEMMING VOOR GEGEVEN WORDT
- LET OP: Neem in dit tentamen voor de grootte van de zwaartekrachtversnelling steeds $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.

DEZE TABEL IS VOOR ADMINSTRATIEVE DOELEINDEN; NIET INVULLEN!

AAA	BBB	CCC	DDD	EEE	FFF	GGG	HHH	III	JJJ	KKK	LLL

VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A

**AFDELING BEWEGINGSWETENSCHAPPEN, VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
TENTAMEN BIOMECHANICA 2016-2017, DEEL 2, 29 MEI 2017, VERSIE A**

Naam: Studentnummer:

DEEL A: WAAR/ONWAAR VRAGEN (DIT DEEL BEPAALT 1/3 DEEL VAN HET CIJFER)

Instructie: lees elk van de volgende stellingen aandachtig door. Besluit of de stelling waar (W) of onwaar (O) is. Vul je antwoord in, **in de tabel onderaan de lijst met stellingen**; vul een W in voor waar, vul een O in voor onwaar.

1. Op een *rigid body* in 2D werkt een krachtvector \vec{F} , die aangrijpt op een afstand d van het gekozen draaipunt. Het moment van deze krachtvector is te berekenen uit vector \vec{F} en afstand d .
2. Een turner hangt met opgetrokken benen aan een rekstok. We verwaarlozen de wrijving tussen de rekstok en de handen. Als er sprake is van statisch evenwicht, dan bevindt het massamiddelpunt van de turner zich recht onder de rekstok.
3. We beschouwen een *rigid body* in 2D. De gyratiestraal van dit *rigid body* ten opzichte van het massamiddelpunt is altijd gelijk aan nul.
4. Op een *rigid body* in 2D werken twee krachten die samen een koppel vormen. De som van de momenten van deze twee krachten is onafhankelijk van het gekozen draaipunt.
5. De netto gewrichtsreactiekracht van bekken op bovenbeen in een invers dynamisch segmentenmodel is een goede benadering van de werkelijke kracht die in het heupgewricht werkt van bekken op bovenbeen.
6. Een puntmassa P beweegt over een rechte lijn onder invloed van een tijdsafhankelijke kracht F . Als de verplaatsing van P over een gegeven tijdsinterval gelijk is aan nul, dan is de arbeid van F over dat tijdsinterval ook gelijk aan nul.
7. Een fietser rijdt door de bocht. Op een zeker tijdstip staan de snelheidsvector en de versnellingsvector van het massamiddelpunt loodrecht op elkaar. Daaruit volgt dat de tijdsafgeleide van de kinetische energie van het massamiddelpunt op dit tijdstip gelijk is aan nul.
8. Op een puntmassa die beweegt over een rechte lijn werkt in de bewegingsrichting steeds dezelfde constante kracht F . In geval A treedt er in T seconden een verplaatsing Δr op. In geval B treedt er in $2 \cdot T$ seconden een verplaatsing $2 \cdot \Delta r$ op. Het gemiddeld vermogen van F is in geval B tweemaal zo groot als in geval A .
9. Op een puntmassa werken n krachten. Op elk tijdstip geldt dat het instantaan vermogen van deze n krachten samen gelijk is aan de tijdsafgeleide van de kinetische energie van de puntmassa.
10. De rotatoir kinetische energie van een *rigid body* kan alleen veranderen indien er zuivere momenten op dit *rigid body* werken.

... ZIE VOLGENDE PAGINA VOOR DEEL B ...

Instructie: vul in de tabel hieronder voor elke stelling van DEEL A een W in voor waar of een O voor onwaar; toelichting is niet nodig!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A

**AFDELING BEWEGINGSWETENSCHAPPEN, VRIJE UNIVERSITEIT AMSTERDAM
TENTAMEN BIOMECHANICA 2016-2017, DEEL 2, 29 MEI 2017, VERSIE A**

Naam: Studentnummer:

DEEL B: BASISVAARDIGHEIDSVRAGEN (DIT DEEL BEPAALT 1/3 DEEL VAN HET CIJFER; ELK ONDERDEEL WEEGT HIER EVEN ZWAAR)

Instructie: lees elk van de volgende opgaven aandachtig door. Vul alleen het antwoord in, **in de tabel onderaan dit deel van het tentamen**; toelichting is niet nodig. Bij de beoordeling wordt uitsluitend naar het antwoord gekeken; wees dus zeer zorgvuldig bij het rekenwerk! Denk goed na over het *teken van je antwoord*, en over het *verschil tussen een getal en een vector*!

LET OP: Neem in dit tentamen voor de grootte van de zwaartekrachtversnelling steeds $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.

11. Op een *rigid body* met massamiddelpunt c werkt een kracht \vec{F} die aangrijpt in punt P .

Er geldt $\vec{r}_c = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.5 \end{bmatrix} \text{ m}$, $\vec{r}_P = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} \text{ m}$, $\vec{F} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \end{bmatrix} \text{ N}$.

Bereken het moment van de kracht \vec{F} ten opzichte van het massamiddelpunt c . Druk je antwoord uit in $\text{N} \cdot \text{m}$, en geef 0 decimalen.

12. Op de uiteinden A en B van een massaloze staaf met lengte $L = 1.4 \text{ m}$ zijn twee puntmassa's geplaatst. Er geldt $m_A = m_B = 8.00 \text{ kg}$. Bereken het traagheidsmoment van staaf plus puntmassa's ten opzichte van het massamiddelpunt van dit systeem. Druk je antwoord uit in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$, en geef 2 decimalen.

13. We beschouwen een massaloze lineaire demper waarvan één uiteinde is bevestigd in de oorsprong; het andere uiteinde, dat we Q noemen, beweegt over de x -as. Voor de x -component van de kracht van omgeving op demper in punt Q geldt: $F_{omgeving,demper,x} = 40.0 \cdot v_{Q,x}$. Voor de x -coördinaat van Q geldt: $r_{Q,x}(t) = \frac{3}{t+1}$. Bereken het instantaan vermogen dat vanuit de omgeving aan de demper wordt geleverd op tijdstip $t = 1.0 \text{ s}$. Druk je antwoord uit in W , en geef 1 decimaal.

14. We beschouwen één volledige omwenteling van een draaimolen in bovenaanzicht. Het massamiddelpunt van de draaimolen ligt op de as; het traagheidsmoment ten opzichte van het massamiddelpunt bedraagt $500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. De draaimolen wordt aangedreven door een motor die een zuiver moment uitoefent op de draaimolen; dit moment is constant. De enige andere variabele in het free body diagram van de draaimolen in bovenaanzicht is de kracht bij de as. De hoeksnelheid van de draaimolen neemt tijdens de beschouwde volledige omwenteling toe van 1.0 rad/s naar 1.5 rad/s . Bereken de grootte van het moment van de motor op draaimolen. Druk je antwoord uit in $\text{N} \cdot \text{m}$, en geef 2 decimalen.

... ZIE VOLGENDE PAGINA VOOR DEEL C ...

Instructie: vul in de tabel hieronder bij elk onderdeel van de vragen van DEEL B het door jou berekende antwoord in; toelichting is niet nodig!

11	12	13	14

VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A

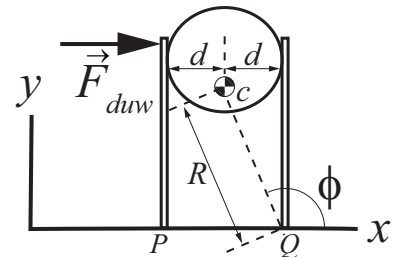
Naam: Studentnummer:

DEEL C: TOEPASSINGSVRAGEN (DIT DEEL BEPAALT 1/3 DEEL VAN HET CIJFER);
 ELK ONDERDEEL WEEGT HIER EVEN ZWAAR

Instructie: Beantwoord deze vraagstukken OP DIT FORMULIER. Geef kort maar duidelijk aan hoe je tot het antwoord bent gekomen; doe je best om je antwoord steeds in strikt mechanische termen te formuleren; de goede aanpak levert hier punten op!

15. Op internet is veel flauwekul te zien en te lezen over *cow tipping*. Dit is een *urban legend* die stelt dat meerdere personen in zijdelingse richting zo hard tegen een in eerste instantie stilstaande koe kunnen aanduwen, dat deze koe gaat roteren en uiteindelijk op haar zij valt.

We beschouwen de koe in achteraanzicht, waarbij linker voorpoot en linker achterpoot worden samengenomen tot 'de' linkerpoot (met uiteinde P), en idem voor rechter voorpoot en rechter achterpoot (met uiteinde Q). Zie bijgaande figuur voor de definitie van de relevante variabelen. Als de koe gaat bewegen, verplaatst punt Q niet terwijl punt P loskomt van de grond.



Voor alle onderstaande vragen geldt dat we de koe opvatten als een *rigid body* met massamiddelpunt c , en dat de duwkracht precies in horizontale richting werkt. Verder geldt voor de koe $d = 0.2$ m, $R = 1.2$ m, $m = 700$ kg en $J_c = 100$ kg · m².

15a. Bereken de minimale waarde van $F_{duw,x}$ waarbij de koe zal gaan roteren, in de situatie waarin $F_{duw,x}$ aangrijpt op 1.50 m boven de grond. Licht je berekening duidelijk toe in strikt mechanische termen.

15b. We stellen ons nu voor dat we de koe met een kortdurende duw een beginhoeksnelheid geven, en dat we na deze duw geen kracht meer uitoefenen op de koe. Bereken de minimale beginhoeksnelheid die we de koe in de beschreven beginpositie moeten geven om de koe te laten omvallen.

GEEF HIERONDER EN OP DE PAGINA LINKS JE ANTWOORD OP BOVENSTAANDE VRAGEN

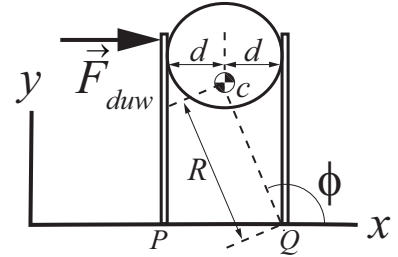
... ZIE VOLGENDE PAGINA VOOR VERVOLG DEEL C ...

Naam: Studentnummer:

**DEEL C: TOEPASSINGSVRAGEN (DIT DEEL BEPAALT 1/3 DEEL VAN HET CIJFER);
ELK ONDERDEEL WEEGT HIER EVEN ZWAAR**

Instructie: Beantwoord deze vraagstukken OP DIT FORMULIER. Geef kort maar duidelijk aan hoe je tot het antwoord bent gekomen; doe je best om je antwoord steeds in strikt mechanische termen te formuleren; de goede aanpak levert hier punten op!

15 (vervolg). Voor het gemak herhalen we de relevante informatie. We beschouwen de koe in achteraanzicht, waarbij linker voorpoot en linker achterpoot worden samengenomen tot ‘de’ linkerpoot (met uiteinde P), en idem voor rechter voorpoot en rechter achterpoot (met uiteinde Q). Zie bijgaande figuur voor de definitie van de relevante variabelen. Als de koe gaat bewegen, verplaatst punt Q niet, terwijl punt P loskomt van de grond.



Voor alle onderstaande vragen geldt dat we de koe opvatten als een *rigid body* met massamiddelpunt c , en dat de duwkracht precies in horizontale richting werkt. Verder geldt voor de koe $d = 0.2$ m, $R = 1.2$ m, $m = 700$ kg en $J_c = 100$ kg \cdot m².

15c. We stellen ons nu voor dat in de beginsituatie geldt dat $F_{duw,x} = 500$ N, waarbij deze kracht aangrijpt op 1.50 m boven de grond. Bij deze duwkracht komt de koe nog niet in beweging, er is dus sprake van evenwicht. Leg aan de hand van de geschikte kracht- en/of momentenvergelijking uit waarom in deze situatie de horizontale kracht die in punt Q van grond op rechterpoot werkt niet berekend kan worden.

15d. We beschouwen nu een hypothetische uitvoering van *cow tipping* waarbij (anders dan bij vraag b.) tijdens het roteren van de koe $F_{duw,x}$ ongelijk is aan nul. Op een zeker tijdstip tijdens de rotatie van de koe geldt: $\phi = 1.65$ rad, $\dot{\phi} = -0.5$ rad/s, $\ddot{\phi} = -2.0$ rad/s². Zie bijgaande figuur voor de definitie van hoek ϕ . Bereken het instantaan vermogen dat op dit tijdstip door $F_{duw,x}$ aan de koe wordt geleverd.

GEEF HIERONDER EN OP DE PAGINA LINKS JE ANTWOORD OP BOVENSTAANDE VRAGEN

ANTWOORDEN EN UITWERKING

DEEL A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
O	W	O	W	O	O	W	O	W	O

VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A

DEEL B

11	12	13	14
10	7.84	22.5	49.74

VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A... VERSIE A

11. $M_F = (r_{P,x} - r_{c,x}) \cdot F_y - (r_{P,y} - r_{c,y}) \cdot F_x = (1.1 - 0.8) \cdot 300 - (0.3 - (-0.5)) \cdot 100 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$.

12. $J_{/c} = \Sigma m_i \cdot R_i^2 = 2 \cdot (8.00 \cdot 0.7^2) = 7.84 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

13. $r_{Q,x}(t) = 3 \cdot (t + 1)^{-1}$ en dus $v_{Q,x}(t) = -3 \cdot (t + 1)^{-2}$ en dus $v_{Q,x}(t = 1.00) = -3 \cdot (1 + 1)^{-2} = -0.75 \text{ m/s}$
 $F_{omgeving,demper} = 40.0 \cdot v_{Q,x}$ en dus geldt op $t = 1 \text{ s}$ dat $F_{omgeving,demper} = 40.0 \cdot (-0.75) = -30.0 \text{ N}$
 $P_{F_{omgeving,demper}} = F_{omgeving,demper} \cdot v_{Q,x} = -30.0 \cdot (-0.75) = 22.5 \text{ W}$

14. Free body draaimolen, energievergelijking over 1 volledige omwenteling:

$A_M + A_{F_{as}} = \Delta E_{kin,c} + \Delta E_{rot}$ en dus
 $\int_0^{2\pi} M \, d\phi + 0 = 0 + 0.5 \cdot J_{/c} \cdot (\dot{\phi}_{eind}^2 - \dot{\phi}_{begin}^2)$ en dus
 $2 \cdot \pi \cdot M = 0.5 \cdot J_{/c} \cdot (\dot{\phi}_{eind}^2 - \dot{\phi}_{begin}^2)$ en dus
 $M = \frac{J_{/c} \cdot (\dot{\phi}_{eind}^2 - \dot{\phi}_{begin}^2)}{4\pi} = \frac{500 \cdot (2.25 - 1.00)}{4\pi} \approx 49.74 \text{ N} \cdot \text{m}$

DEEL C

15a.

De kritieke waarde van de kracht leidt er toe dat de grondreactiekracht in P nul is, terwijl er nog net geen (hoek)versnelling is. *Free body* koe, momentenvergelijking met Q als draaipunt is het handigst:

$$M_G + M_{F_{duw,x}} = 0 \text{ en dus } -0.2 \cdot (-7000) - 1.5 \cdot F_{duw,x} = 0 \text{ en dus } F_{duw,x} = -0.2 \cdot (-7000)/1.5 \approx 933 \text{ N}$$

15b.

De initiële hoeksnelheid moet hier net hoog genoeg zijn om het massamiddelpunt recht boven Q te brengen; om die hoeksnelheid te berekenen beschouwen we de *rigid body* energievergelijking voor het *free body* koe, over het tijdsinterval dat begint in de begintoestand en eindigt met kinetische energie nul als $\phi = 0.5\pi$ rad:

$$A_G = 0 - E_{kin,start} \text{ en dus } 700 \cdot (-10) \cdot 1.2 \cdot (1 - \sin(\phi_{start})) = -0.5 \cdot J_{/Q} \cdot \dot{\phi}_{start}^2;$$

voor ϕ_{start} vinden we: $\phi_{start} = \arcsin(0.2/1.2) + 0.5\pi \approx 1.74$ rad;

de kinetische energie is het eenvoudigst te berekenen als de rotatie-energie t.o.v. Q , daarvoor moeten we $J_{/Q}$ berekenen:

$$J_{/Q} = J_c + m \cdot R^2 = 100 + 700 \cdot 1.2^2 = 1108 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; \text{ invullen levert nu:}$$

$$-8400 \cdot (1 - \sin(1.74)) \approx -0.5 \cdot 1108 \cdot \dot{\phi}_{start}^2 \text{ en dus}$$

$$\dot{\phi}_{start} \approx \sqrt{\frac{8400 \cdot (1 - \sin(1.74))}{554}} \approx 0.46 \text{ rad/s}$$

15c.

We nemen de koe als *free body*; in de x -krachtenvergelijking komen de onbekende x -krachten in P en Q allebei voor; omdat deze x -krachten dezelfde werklijn hebben, hebben ze in de momentenvergelijking dezelfde arm; deze twee krachten zijn dus noch in de x -krachtenvergelijking noch in de momentenvergelijking van elkaar te scheiden; daaruit volgt dat er voor de x -krachten in P en Q oneindig veel oplossingen zijn.

15 d.

Rigid body vermogensvergelijking voor het *free body* koe, waarbij de enige krachten die vermogen leveren G_y en $F_{duw,x}$ zijn;

$$P_{G_y} + P_{F_{duw,x}} = dE_{kin}/dt$$

Voor P_{G_y} vinden we:

$$P_{G_y} = m \cdot g \cdot v_{c,y} = m \cdot g \cdot R \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\phi) = 700 \cdot (-10) \cdot 1.2 \cdot -0.5 \cdot (-0.079) \approx -332.3 \text{ W}$$

Voor dE_{kin}/dt vinden we:

$$dE_{kin}/dt = J_{/Q} \cdot \dot{\phi} \cdot \ddot{\phi} = 1108 \cdot (-0.5) \cdot (-2.0) = 1108 \text{ W}$$

Daarmee vinden we voor $P_{F_{duw,x}}$:

$$P_{F_{duw,x}} = dE_{kin}/dt - P_{G_y} = 1108 - (-332.3) \approx 1440.3 \text{ W}$$